

QUBE-F- Fachportal Mathematik - Beispiel: Einführung der Produktregel, Gymnasium, J1

Item 1.1: Der Unterricht hat einen klaren Fokus auf die zentralen Inhalte, die von den Schülerinnen und Schülern verstanden werden sollen. („Verständnisorientierung“)

Bereits im Vorfeld der Unterrichtsstunde muss die Lehrkraft die zentralen Inhalte der Stunde festlegen und diese bei der Planung als auch bei der späteren Durchführung der Unterrichtsstunde beständig anvisieren. Dieses Anvisieren – insbesondere auch schon in der Planungsphase – schafft die Voraussetzung dafür, dass **die Lehrkraft ihren Unterricht auf die zentralen zu erwerbenden Inhalte fokussiert**.

Zentrale Inhalte – konzeptuell und prozedural

Zentrale Inhalte bei der Einführung der Produktregel sind im Bereich des *konzeptuellen Wissens*:

- a) Erkenntnis, dass Produkte von Funktionen nicht komponentenweise, das heißt hier faktorweise, abgeleitet werden, wie dies bei Summen/Differenzen von Funktionen der Fall ist
- b) Nachweis der Gültigkeit der Produktregel an Beispielen, die sich auch ohne Produktregel ableiten lassen (zum Beispiel Produkte von Funktionen der Form $a \cdot x^q$ ($q \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{R}$)).
- c) Beweis der Produktregel, zum Beispiel anhand des Differentialquotienten (also des Grenzwertes des Differenzenquotienten), da hier ersichtlich wird, wie diese Regel entsteht.
Hinweis: Die äußere Differenzierung in Basis- und Leistungsfach ermöglicht ein adressatengerechtes Vorgehen. Ein formaler Beweis der Produktregel muss im Basisfach nicht durchgeführt werden, allerdings sollte zumindest mitgeteilt werden, dass diese Regel allgemeingültig beweisbar ist.

Zentrale Inhalte bei der Einführung der Produktregel im Bereich des *prozeduralen Wissens*:

- d) Kenntnis der Produktregel (Kurz: u, v sind differenzierbare Funktionen.
Dann: Für f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gilt $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.)
- e) Korrektes Anwenden der Produktregel an ersten Beispielen

Fokussierung der zentralen Inhalte im Unterricht

Wie kann das Fokussieren/Anvisieren dieser Inhalte unterrichtlich umgesetzt werden, sodass **die zu erwerbenden Inhalte klar und verständlich dargelegt werden**?

- a) Zu Beginn werden Funktionen abgeleitet, die man direkt ableiten oder als Produkt schreiben und dann ableiten kann (zum Beispiel $f(x) = x^5$ und $f(x) = x^2 \cdot x^3$). Dabei soll erkannt werden, dass nicht faktorweise abgeleitet werden kann.
- b) Eine oder mehrere gefundene/vermutete Regeln werden anhand von Beispielfunktionen überprüft. Diese Beispielfunktionen sind – wie in a) beschrieben - auf zwei Varianten ableitbar (zum Beispiel $f(x) = x^2$ und $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}$ ($x \geq 0$)).

- c) Nachdem eine Vermutung über das Ableiten von Produkten an einigen Beispielen bestätigt wurde, bleibt nun die Allgemeingültigkeit zu zeigen. Im Basisfach genügt hierzu eine Mitteilung, im Leistungsfach sollte der Beweis durchgeführt werden, zum Beispiel anhand des Differentialquotienten. Hieraus wird ersichtlich, warum die Produktregel diese „unge- wohnte“ Form hat.
- d) Die Produktregel muss deutlich und übersichtlich als Ergebnis gesichert werden (Tafelanschrieb, Heftaufschrieb). Vorteilhaft dabei ist, die zentralen Inhalte graphisch, beispielsweise durch Farbeinsatz oder Rahmung, zu strukturieren und hervorzuheben.
- e) Nun müssen Beispiele zur Produktregel gerechnet werden. Hierbei muss das Anwenden der Regel klar werden, weiterhin muss vermittelt werden, wie das Ableiten eines Produktes sinnvoll notiert wird. Dies muss nicht unbedingt am Ende der Unterrichtsstunde geschehen, es kann zum Beispiel auch in der Phase, in der die Vermutung an Beispielen überprüft wird, geschehen.

Einen „roten Faden“ der Stunde sollten auch die Schülerinnen und Schüler nachverfolgen können. Dieser kann zum Beispiel folgende Bestandteile haben:

1. Entdeckung, dass das Ableiten nicht nach den bisher bekannten Regeln funktioniert
2. Vermutung, wie Produkte von Funktionen abgeleitet werden könnten
3. Überprüfung der Vermutung
4. Feststellen der Allgemeingültigkeit der Vermutung, im Leistungsfach mit Beweis

Ein „roter Faden“ muss den Lernenden nicht zu Beginn der Stunde bekannt sein, es muss ihnen jedoch möglich gemacht werden, ihn im Verlauf der Stunde zu verfolgen. Zur Klarheit kann die Lehrkraft an einzelnen Stellen zurück- oder vorausblicken, um den Lernenden das bisher Erreichte bewusst zu machen bzw. die nächsten Ziele aufzuzeigen, sodass **der Bezug zu den zentralen Inhalten im Verlauf der Stunde immer wieder hergestellt wird.**

Dadurch wird **in der Stunde deutlich, was die Schülerinnen und Schüler am Ende können, verstanden oder kritisch reflektiert haben sollen.**

Minimalziel der Unterrichtsstunde

Weiterhin muss die Lehrkraft betonen, was zukünftig von den Lernenden erwartet wird. Hier gehört zum Minimalziel, dass Produkte von Funktionen als solche identifiziert und sie korrekt mit der Produktregel abgeleitet werden.

Dieser Teil des Minimalziels beinhaltet rein prozedurale Fähigkeiten. Dies kann jedoch nicht das gesamte Minimalziel der Unterrichtsstunde sein, denn:

Im Verlauf der Stunde geht es auch um konzeptionelle Fähigkeiten, nämlich das Widerlegen einer Annahme, das Finden einer Vermutung, das Plausibel-Machen oder Beweisen dieser Vermutung. Diese Elemente sind neben dem Erwerb der prozeduralen Fähigkeiten keinesfalls zu vernachlässigen, da sie wesentliche Bestandteile des Mathematik-Treibens sind. Eine sehr gute Unterrichtsstunde - insbesondere im Blick auf die Verständnisorientierung - zeichnet sich auch dadurch aus, dass diese Unterrichtsphasen bewusst mit dem Blick auf diese mathematischen Kompetenzen

durchgeführt werden, was die Lehrkraft in den Rück- beziehungsweise Ausblicken immer wieder betonen sollte. Damit **hebt die Lehrkraft bedeutende Inhalte hervor. Der Unterricht ist also so gestaltet, dass er es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, die zentralen Inhalte zu verstehen.**